MESURE EXPERIMENTALE D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE

I- QUALITE D'UNE MESURE, ERREUR DE MESURE

1- Erreur absolue, erreur relative

Soit une grandeur X de valeur exacte X_e dont la valeur approchée est X_a (supposée voisine de X_e)

L'erreur absolue sur X est X_a - X_e et l'erreur relative sur X est $\dfrac{X_a - X_e}{X_e} \approx \dfrac{X_a - X_e}{X_a}$

Ces deux grandeurs sont algébriques.

2- Mesure expérimentale d'une grandeur physique

La mesure expérimentale d'une grandeur, qu'elle soit directe ou indirecte, conduit à une valeur qui n'est pas rigoureusement exacte : la même mesure répétée plusieurs fois donne, en général, des valeurs différentes.

Plusieurs facteurs influencent la qualité d'une mesure :
- * L'objet de la mesure
- * la méthode de mesure
- * l'instrument de mesure
- * l'expérimentateur.

3- Erreurs systématiques - Erreurs accidentelles

a- Erreur systématique : Erreur qui se produit toujours de la même façon et dans le même sens.
Ces erreurs peuvent être éliminées par correction .

Exemples :
- mauvais réglage du zéro .
- cause perturbatrice due à un appareil de mesure

b- Erreurs accidentelles : **Existent dans n'importe quel sens**, et ne peuvent être connues exactement.

Quand on doit effectuer la mesure d'une grandeur, il faut étudier la méthode à utiliser de manière à :
* Minimiser les causes d'erreurs accidentelles (éviter trop de mesures intermédiaires, choisir des appareils adaptés à la mesure et correctement utilisés..)
* Eviter et éventuellement corriger les erreurs systématiques.

La mesure étant faite, et les erreurs systématiques corrigées si nécessaire, il reste toujours les erreurs accidentelles. On essaiera d'évaluer leur ordre de grandeur et d'encadrer le résultat obtenu pour la mesure.

Deux démarches sont alors possibles

* On effectue une mesure isolée : Essayer alors de déterminer toutes les causes d'erreur accidentelle et d'évaluer leur ordre de grandeur.

* On effectue plusieurs mesures de la même grandeur : Une étude statistique permet, à partir d'un nombre fini de mesures de la grandeur X de proposer un encadrement de cette grandeur.

II- MESURE ISOLEE, INCERTITUDE ABSOLUE ET RELATIVE

1- Définitions :

* incertitude absolue : On appelle incertitude absolue Δg, de la mesure d'une grandeur G, l'écart maximum entre la valeur mesurée g_m et tout autre valeur mesurée.

Notation $(g_m - \Delta g).u \leq G \leq (g_m + \Delta g).u$ u, étant l'unité de la grandeur G

ou $G = (g \pm \Delta g).u$ $(\Delta g > 0)$

Cette incertitude absolue est **estimée** par l'expérimentateur .

*<u>incertitude relative</u> : $= \dfrac{\Delta g}{g_m}$ ou <u>précision</u> = $\dfrac{\Delta g}{g_m} \times 100$

Plus l'incertitude relative est faible plus la mesure est précise

2- <u>Bilan des causes d'erreur</u> : incertitude de construction, incertitude de détermination

a- Incertitudes de construction : dues à l'appareil de mesure .

Le constructeur peut donner la précision ou l'incertitude absolue . Exemples

* résistances à 1% : $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{1}{100}$; si R = 470 Ω , ΔR = 4,7 Ω ≈ 5Ω .
* calibre de la base de temps de l'oscilloscope garanti à 3 % .
* balance de sensibilité s = 1 mg Δm = 1 mg
* appareil numérique (ampèremètre, voltmètre ..) : se reporter à la notice

Pour que la précision soit meilleure, il faudra **choisir un calibre le plus proche possible de la mesure**

b- Incertitudes de détermination : dues

- à l'opérateur : exemple sur une règle, l'œil ne peut apprécier que le 1/4 de division : Δx = 0,25 div (= 0,25 mm) par exemple
- à la sensibilité d'un montage :exemple focométrie détermination de la position de l'image Δx = 5 mm

3- <u>Calcul d'incertitude</u> .

Pour évaluer l'incertitude sur une mesure, on se place dans le cas le plus défavorable: celui où les différentes erreurs commises s'ajoutent.

<u>a- Mesure directe</u> : $\Delta g = \Delta g_c + \Delta g_d$ (si présence des 2 types d'incertitudes)

<u>b- Mesure indirecte</u> (déduite des mesures d'autres grandeurs) G = f(X,Y,Z,...)

grandeur X	mesure x_m	incertitude sur la mesure Δx
grandeur Y	mesure y_m	incertitude sur la mesure Δy
grandeur Z	mesure z_m	incertitude sur la mesure Δz

grandeur G : mesure $g_o = f(x_m,y_m,z_m)$
incertitude sur la mesure de G : Δg ?

On suppose que l'on a effectué de bonnes mesures, c'est à dire que $\Delta x \ll x_m$, $\Delta y \ll y_m$, $\Delta z \ll z_m$, et pourront être assimilées à de petites variations autour de x_m, y_m.......
Dans ces conditions, pour estimer la variation de G, notée dg, due aux variations dx, dy …, on pourra utiliser le calcul différentiel (voir cours de maths)

$$\Rightarrow dg = \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, y_m, z_m).dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_m, y_m, z_m).dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_m, y_m, z_m).dz = A_o.dx + B_o.dy + C_o.dz$$

$\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x} \right.$: dérivée partielle de f par rapport à x (y,z… constants)

Or on ne connaît pas le signe de dx, dy ..., mais seulement leur valeur absolue Δx, Δy .. . On se place donc dans le cas le plus défavorable pour estimer l'incertitude sur la mesure de G : celui où toutes les erreurs commises s'ajoutent . Il faut donc, après le calcul précédent, faire la somme des valeurs absolues de chaque terme, en remplaçant dx à Δx, dy à Δy ...

$$\boxed{\Rightarrow \Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_m, y_m, z_m)\right|.\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_m, y_m, z_m)\right|.\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}(x_m, y_m, z_m)\right|.\Delta z = |A_o|.\Delta x + |B_o|\Delta y + |C_o|.\Delta z}$$

(valeur maximale de l'erreur)

Remarque : Cas où la grandeur G s'exprime en fonction des grandeurs X,Y,Z.. sous forme d'un « produit » :
$G = k.X^{\alpha}.Y^{\beta}.Z^{\delta}$ .. ,soit pour les mesures : $g = k.x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\delta}$ ...

Il est judicieux d'utiliser la différentielle logarithmique **(voir cours de maths)** qui conduit directement à l'incertitude relative.

soit $\frac{dg}{g} = \alpha.\frac{dx}{x} + \beta.\frac{dy}{y} + \delta.\frac{dz}{z}$

$$\boxed{\frac{\Delta g}{|g_m|} = |\alpha|.\frac{\Delta x}{|x_m|} + |\beta|.\frac{\Delta y}{|y_m|} + |\delta|.\frac{\Delta z}{|z_m|}}$$

Conséquence : Le calcul d'incertitude permet de limiter le nombre de chiffres significatifs de la valeur numérique obtenue pour la mesure d'une grandeur. Le dernier chiffre donné - le plus à droite - doit être le premier entaché d'erreur.

4- Résumé et discussion

a- Travail à effectuer lors une mesure expérimentale

* Avant la mesure : Estimer les causes d'erreur, en déduire le choix de la méthode à utiliser si plusieurs sont possibles.

* Pendant et après la mesure :

- Déterminer les erreurs systématiques commises.
- Evaluer les incertitudes de mesure directes (construction et détermination).
- Effectuer le calcul d'incertitude sur la mesure de la grandeur : Δg et $\frac{\Delta g}{g}$.
- Corriger les erreurs systématiques si nécessaire . Cette correction n'est pas nécessaire si elles sont négligeables (inférieures d'un facteur de l'ordre de 10) devant les incertitudes de mesure.

b- Discussion : L'intervalle d'incertitude ainsi obtenu apparaît comme un intervalle de certitude de la présence de la vraie valeur cherchée.

Critiques :
+ Toutes les causes d'erreur doivent être prises en compte, ce qui n'est pas toujours possible.
+ Les incertitudes Δx, Δy .. sont estimées de façon empirique
+ Les incertitudes de construction sont en fait probabilistes mais le niveau de confiance que l'on peut leur accorder n'est pas donné.

L'intérêt de ce type de calcul est d'évaluer l'erreur qu'entraîne sur la grandeur mesurée, les erreurs commises sur les grandeurs primaires. Elle donne l'ordre de grandeur de la précision de la mesure, liée à la méthode de mesure et aux appareils utilisés.

Les intervalles ainsi déterminés seront en général pessimistes, car pour leur estimation on a supposé que toutes les erreurs accidentelles commises s'ajoutent au maximum. Cela ne signifie pourtant pas que la valeur réelle de la grandeur soit contenue dans l'intervalle obtenu mais simplement que la probabilité d'y trouver cette grandeur est grande sans toutefois pouvoir préciser la valeur de cette probabilité.

III- EVALUATION STATISTIQUE DE L'INCERTITUDE DE MESURE (notions)

Lorsque l'on répète N fois la mesure d'une même grandeur G, on dispose d'un lot de résultats : $g_1, g_2, ..., g_i, ..., g_n$

1 - Grandeurs caractérisant une série de mesures (éventuellement éliminer un résultat aberrant)

a- moyenne arithmétique : $<g> = \frac{1}{N}(g_1 + g_2 + .. + g_n) = \frac{1}{N}.\sum_i g_i$. C'est le meilleur estimateur de g

b- dispersion - écart type

* écart quadratique moyen: moyenne des carrés des écarts $\Delta g_i = g_i - <g>$: $\sigma^2 = \frac{1}{N}.\sum_i (\Delta g_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_i (g_i - <g>)^2$

* écart type - coefficient de dispersion .

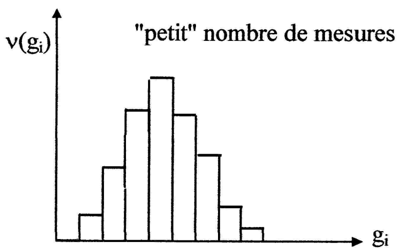
- écart type d'une série de mesures $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$ (les calculettes ont un programme de calcul de σ)
- dispersion d'une série de mesures $\sigma/<g>$

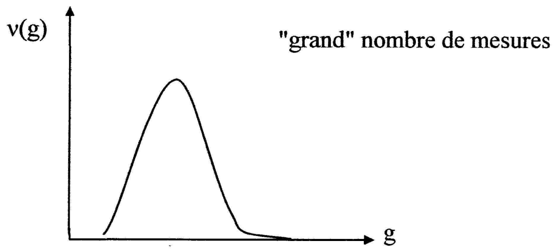
c- intervalle de confiance : Une étude statistique permet, lorsque l'on dispose de mesures indépendantes (expérimentateurs, appareils de mesures, différents), de définir un intervalle, centré autour de la valeur moyenne de g , dans lequel on a une probabilité donnée de trouver la valeur exacte de la mesure de la grandeur G.

Par exemple, si la courbe continue associée à l'histogramme est, autour de la valeur moyenne, une courbe de Gauss, on montre que le résultat a 96 chances sur 100 de se trouver dans l'intervalle $\left[\langle g\rangle - \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}, \langle g\rangle + \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}\right]$.

On note également : $G = \left(\langle g\rangle \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}\right).u$. *L'incertitude absolue statistique est* $\Delta g = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$.

Remarques : 1- l'histogramme est le graphe obtenu en portant en abscisses les résultats g_i et en ordonnée leur fréquence d'obtention $\nu(g_i)$.





2- L'intervalle donné précédemment est valable si l'on dispose d'un grand nombre de mesures (typiquement N > 50). Or, nous ne disposerons en général que d'un nombre plus limité de valeurs.
*La statistique permet, moyennant un certain nombre d'hypothèses, d'associer à ces mesures un **intervalle de confiance** dans lequel on a une **probabilité donnée α** de trouver la valeur exacte de la grandeur mesurée.*

Il existe plusieurs méthodes d'estimation. Il est évident que, quelle que soit la méthode :

** pour un niveau de confiance α donné, l'intervalle correspondant sera d'autant plus grand que N, nombre de mesures, est petit.*

** pour un nombre de mesures donné, N, l'intervalle sera d'autant plus grand que le niveau de confiance α sera élevé.*

Quelle que soit la méthode utilisée, après élimination éventuelle de résultats aberrants, le meilleur estimateur de g est la moyenne arithmétique des n mesures effectuées : $g_o = \frac{1}{N}\sum_i g_i$ *et l'intervalle de confiance est centré sur* g_o

2- Conclusion : mesure isolée - série de mesure

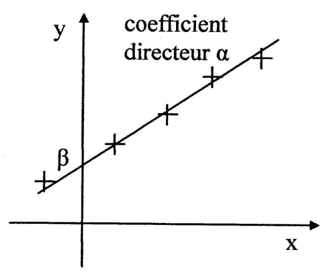
mesure isolée	**série de mesures**
valeur mesurée g_m incertitude absolue Δg incertitude relative $\frac{\Delta g}{g_m}$	valeur moyenne <g> écart type σ coefficient de dispersion $\frac{\sigma}{<g>}$

IV- VERIFICATION EXPERIMENTALE D'UNE LOI PHYSIQUE

Supposons que l'on souhaite vérifier une loi physique constituant un modèle dans un domaine de validité donné. On essaiera toujours de se ramener à une relation affine entre deux grandeurs X et Y.

Par exemple pour vérifier l'expression de la période du pendule $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, on étudiera les variations de $Y = T^2$ en fonction de $X = \ell$ à g fixé et l'on vérifiera $Y = \frac{4\pi^2}{g}.X = \alpha.X$ en effectuant une série de mesures de T (donc Y) en faisant varier X (ℓ).

Dans le cas général, on essaiera de relier les mesures y de Y et x de X par une relation de la forme $y = \alpha.x + \beta$ où α et β sont des constantes. On tracera alors le graphe $y = f(x)$.



Les différentes mesures (x_i , y_i) sont connues avec une certaine incertitude et les points { x_i , y_i } ne sont pas parfaitement alignés.
Pour déterminer les coefficients α et β, on trace la droite qui semble passer au mieux par tous les points expérimentaux.
Le coefficient β s'obtient directement : c'est l'ordonnée à l'origine de cette droite.
Le coefficient α (coefficient directeur de la droite tracée) se détermine à partir de **2 points de la droite tracée** (et non 2 points de mesure) suffisamment éloignés et facilement repérables.

Si l'on dispose d'une calculatrice le permettant ou d'un logiciel, on pourra effectuer une **régression linéaire** (droite des moindres carrés) pour déterminer les coefficients α *et* β. Afin de vérifier la validité du modèle, le programme donne **le coefficient de corrélation** qui, si le modèle linéaire est correct, doit être voisin de 1 (si $\alpha > 0$) ou de -1 (si $\alpha < 0$).